Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Successioni

Chiameremo successione ogni funzione

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Attenzione: Per una successione ha senso solo

$$\lim_{n \to +\infty} f(n) \quad !!!$$

Poiché $f(n) = a_n \in \mathbb{R}$, si preferisce utilizzare la notazione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ per indicare una successione

Def Data una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diremo che

1. $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

se $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad |a_n - l| < \varepsilon}$

2. $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

se $\boxed{\forall K > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq K}$

3. $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

se $\boxed{\forall K > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_0 \quad a_n \leq -K}$

Def (Successioni Monotone)

Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice

(1.) Monotona crescente se $\quad a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2.) Monotona decrescente se $\quad a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Teorema

Ogni successione monotona è regolare (ossia $\exists \lim_{n \to +\infty} a_n$: finito, $+\infty$, $-\infty$)

Più precisamente,

se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona crescente

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Dim caso $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ decrescente

Tesi: se $l = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

Per la natura $l \in \mathbb{R}$, uso proprietà caratteristiche inf

(i) $l \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : l \leq a_{n_0} \leq l + \varepsilon$

Quindi: $a_{n_0} \leq l + \varepsilon$

(Ip) $\forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq a_{n_0} \leq l + \varepsilon$

Conclusione $\forall n \geq n_0$

$$l - \varepsilon < l \leq a_n \leq a_{n_0} \leq l + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

Teorema (unicità del limite)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Se } \lim_{n \to +\infty} a_n = l_1 \\ \text{e } \lim_{n \to +\infty} a_n = l_2 \end{array}\right\} \Rightarrow l_1 = l_2$$

Teorema (permanenza del segno)

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = l > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad a_n > 0 \quad \forall n \geq n_0$

Teorema (confronto)

(1.) (Carabinieri)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 3 successioni tali:

$$a_n \le b_n \le c_n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \ell$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$$

(2.) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$

(3.) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

<u>Successione</u> di <u>Nepero</u>

$\forall n\in\mathbb{N} \qquad a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \quad , \quad a_3 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \quad , \ldots$

$a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

$a_1 < a_2$?

$2 < \frac{9}{4} \iff 8 < 9$ Sì

$a_2 < a_3$?

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 < \left(\frac{4}{3}\right)^3$$

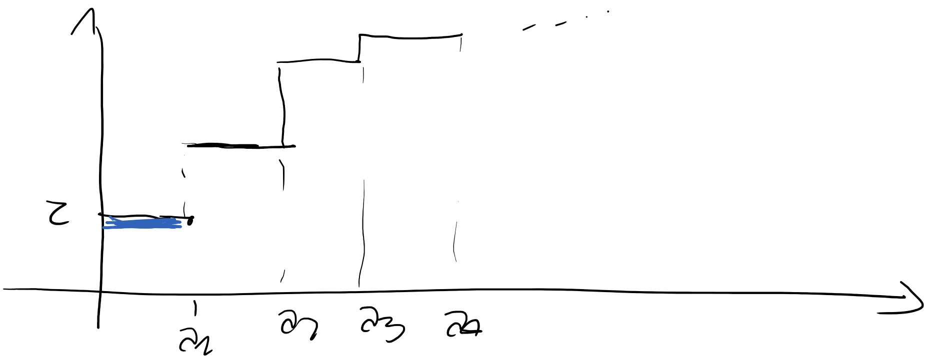
$$\frac{9}{4} < \frac{64}{27} \iff 9 \cdot 27 < 64 \cdot 4$$

$$243 < 256$$ Si

$$\iff \begin{array}{r} 27 \\ 9 \\ \hline 243 \end{array} \; ; \; \begin{array}{r} 64 \\ 4 \\ \hline 256 \end{array}$$

Si prova che $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ossia la successione di Nepero è monotona crescente



Si prova che $a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ La successione di Nepero è monotona crescente e limitata.

Dal teorema sui limiti di successioni crescenti

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \in \left]2, 3\right[$$

"e" viene detto Numero di Nepero

<u>Def</u> (estratta)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. Se considero

$(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ <u>successione</u> <u>crescente</u>

La nuova successione

$(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ viene chiamata "estratta" di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Esempio di estratta

$a_2, \quad a_7, \quad a_{11}, \quad a_{13}, \quad a_{50}, \ldots$

<u>Esempio</u>

$a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}, \ldots$

In tal caso si parla di <u>estratta pari</u>

Analoga definizione per l'<u>estratta</u> <u>dispari</u>

<u>Teorema</u>

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \iff \left[\forall (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N} \text{ crescente} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = l \right]$

Tale teorema ci servirà quando dobbiamo provare

$\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$

Teorema (inverso negativo)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione : $\exists\ (p_n), (q_n) \subseteq \mathbb{N}$ crescenti tali che

$$\lim_{n\to+\infty} a_{p_n} = l_1 \quad e \quad \lim_{n\to+\infty} a_{q_n} = l_2$$

con $l_1 \neq l_2 \implies \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$

Def (successione di Cauchy)

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice di Cauchy se

$$\boxed{\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N} : \forall n,m\in\mathbb{N} \text{ con } n,m\geq n_0 \quad |a_n - a_m| < \varepsilon}$$

Teorema

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è Cauchy se e solo se $\exists\ l\in\mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty} a_n = l$

Teorema (Bolzano - Weierstrass)

Sia $X\subseteq\mathbb{R}$ non vuoto, limitato e infinito (contiene infiniti elementi)

$$\Longrightarrow \quad DX \neq \emptyset$$

Corollario Ogni successione limitata ammette almeno un'estratta convergente (ad un numero)

Esempio $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$

se $\lim_{n \to +\infty} a_{2n} = 1 \qquad \lim_{n \to +\infty} a_{2n+1} = -1$

$$\Longrightarrow \quad \nexists \lim_{n \to +\infty} (-1)^n$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

è successione limitata non regolare con due estratte convergenti (estratta pari + estratta dispari)

Esercizio Calcolare il

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{\log(1+x)} \qquad \left(= \frac{\sqrt{9} - 3}{\log 1} = \frac{0}{0} \quad \text{f.i.} \right)$$

mod 1 (limiti Notevoli)

Ricordo ① $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{\log(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(9+x)^{\frac{1}{2}} - 3}{\underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{\to 1} \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3}{x} \cdot \frac{\left(1 + \frac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{\log(1+x)}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3}{\cancel{x}} \cdot \underbrace{\frac{\left(1 + \frac{x}{9}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{\frac{x}{9}}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \frac{\cancel{x}}{9} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{\to 1}}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{6}$$

Modo 2 (De l'Hopital)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{\log(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{9+x}}}{\frac{1}{1+x} \cdot 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{9}}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$$

Esercizio Trovare l'inf e sup della funzione

Esercizio Trovare l'inf e sup della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \log_2(4-5x) & \text{se } x \in \left]-\frac{12}{5}, 0\right[\\ x^3-5x+3 & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$

precisando se si tratta di min assol. o max assol.

$$f: \left]-\frac{12}{5}, 1\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to -\frac{12}{5}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{12}{5}^+} \log_2(4-5x) =$$

$$= \log_2\left(4 - \cancel{5}\cdot\left(-\frac{12}{\cancel{5}}\right)\right) =$$

$(\log_a a = 1)$

$$= \log_2(4+12) = \log_2 2^4 = 4$$

Vediamo se $x=0$ è discontinuità

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} \log_2(4-5x) = \log_2 4 = 2 \\ &\lim_{x\to 0^+} x^3-5x+3 = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{disc. } 1^e \text{ specie}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4-5x}\cdot\frac{1}{\log 2}\cdot(-5) & \text{se } x\in\left]-\frac{12}{5}, 0\right[\\ 3x^2-5 & \text{se } x\in\left]0, 1\right[\end{cases}$$

caso $x \in]-\frac{12}{5}, 0[$ $\quad f'(x) \geq 0$

$$\iff \underbrace{\frac{\overset{<0}{-5}}{\underset{>0}{4-5x}}}\cdot \underbrace{\frac{1}{\lg 2}}_{>0} \geq 0$$

Mai

$\Rightarrow f(x)$ decresce in $]-\frac{12}{5}, 0[$

caso $x \in]0,1[$ $\quad f'(x) \geq 0$

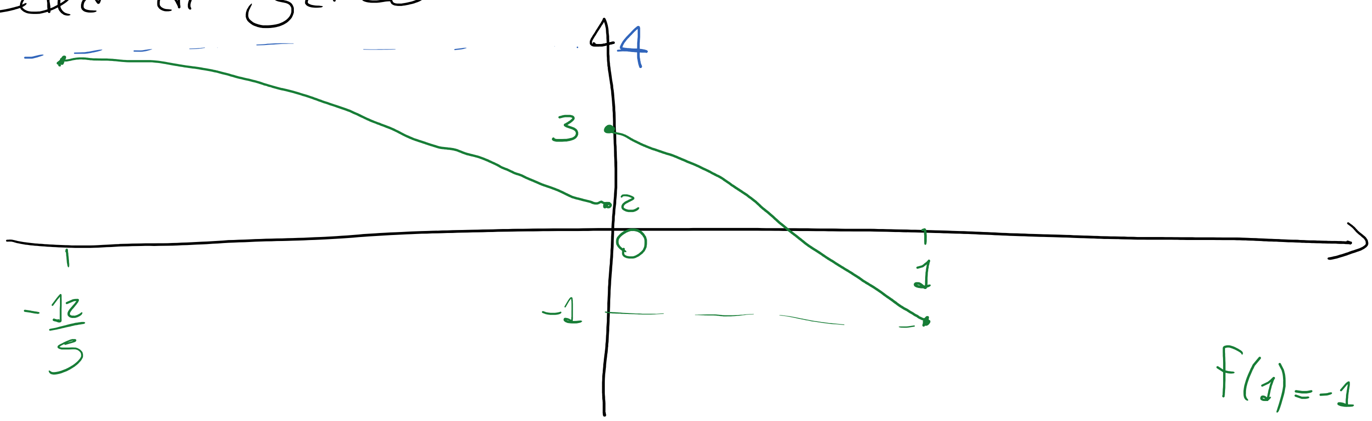
$\iff 3x^2-5 \geq 0$

$\iff \cancel{x \leq -\sqrt{\frac{5}{3}}} \cup \cancel{x \geq \sqrt{\frac{5}{3}}}$

poiché $\sqrt{\frac{5}{3}} > 1$

$\Rightarrow f(x)$ è decrescente in $]0,1[$

Idea di grafico



$\Rightarrow \sup f = 4$ ma non è $\max f$

$\inf f = -1 = \min f$

Esercizio Studiare la derivabilità di

$$f(x) = \sqrt{|x|} \qquad \text{in } x_0 = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

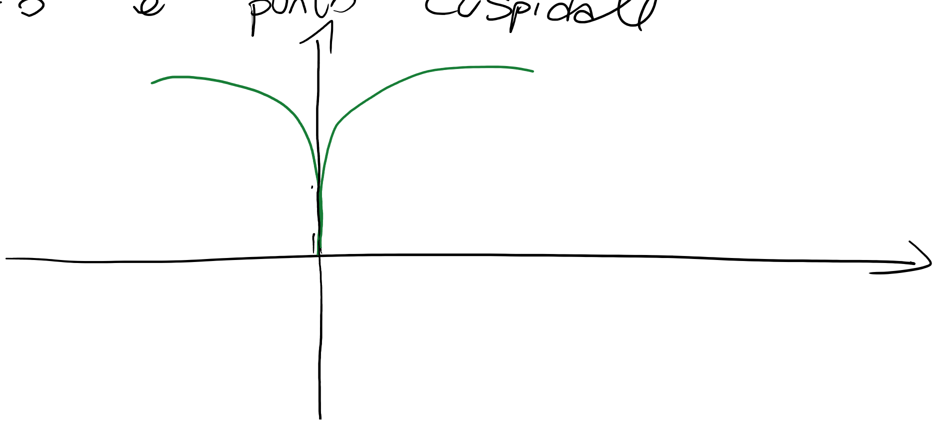
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} \cdot (-1) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} - \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\underbrace{-x}_{\to 0^+}}}}_{\to +\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{\underbrace{x}_{\to 0^+}}} = +\infty$$

$\Longrightarrow$ $x_0 = 0$ è punto cuspidale

Graficamente



Esercizio Studiare la derivabilità di

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & x \neq \pm 1 \\ 0 & x = \pm 1 \end{cases}$$

nei punti $x = -1$ e $x = 1$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} \cdot \left[- \frac{2x}{(x^2-1)^2} \right]$$

in $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\lim_{x \to -1^-} - e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{2x}{(x^2-1)^2} = \left(- e^{\frac{1}{0^+} \to +\infty} \cdot \frac{-2}{0^2} \right)$$

$x \to -1^- \iff x < -1 \implies \boxed{x^2 - 1 > 0} \iff x < -1 \cup x > 1$

$$\frac{1}{x^2-1} \qquad = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} -e^{\frac{1}{x^2-1}} \frac{2x}{(x^2-1)^2} = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$$

$$\left(= -\underbrace{e^{\overset{\to -\infty}{\frac{1}{0^-}}}}_{\to 0} \frac{-2}{(0^2)^+} \right)$$

$$\left(= 0 \cdot (-\infty) \quad f.i. \right)$$

Faccio un cambio di variabile

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^2} \cdot \overset{\to 2}{\lim_{x \to -1^+} -2x} = *$$

cambio di variabile $z = x^2 - 1$

$$\lim_{x \to -1^+} z = 0^-$$

$$* = \lim_{z \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2} \quad \left(\frac{0}{0} \; f.i. \right)$$

De l'Hop $= \lim_{z \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{z}} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)'}{2z} =$

$$= \lim_{z \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{z}} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right)}{2z} \quad \underline{\text{Non conviene}}$$

$$-\quad z \to 0^- \qquad 2z \qquad — \qquad —$$

Torno indietro

$$\lim_{z \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2} = \lim_{z \to 0^-} e^{\frac{1}{z}} \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^2$$

$y = \frac{1}{z}$ $\qquad \lim_{z \to 0^-} y = -\infty$

$$= \lim_{y \to -\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{e^{y}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{y^2} \quad (f.i) =$$

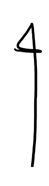
$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{y^2}{e^{-y}} = \text{De l'Hop.}$$

$$= \lim_{y \to -\infty} \frac{2y}{-e^{-y}} \qquad \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)$$

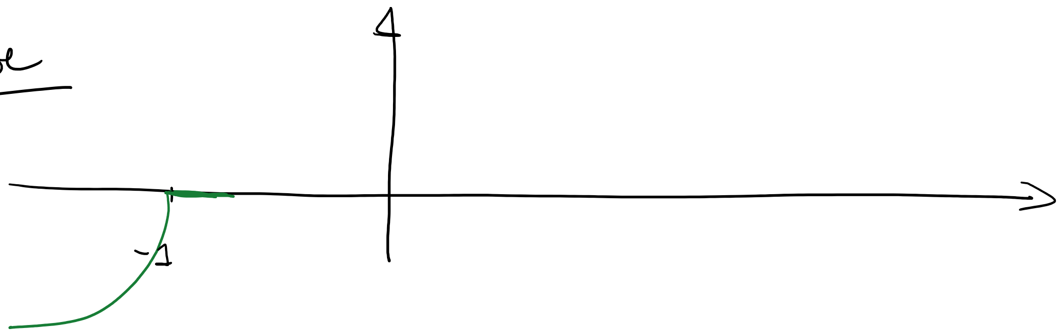
De l'Hopital $\quad = \lim_{y \to -\infty} \frac{2}{e^{-y}} = \frac{2}{+\infty} = 0$

$\Longrightarrow$ $x = -1$ è punto cuspidale

Graficamente



Graficamente



Studio derivabilità in $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -2x\, e^{\frac{1}{x^2-1}} \cdot \frac{1}{(x^2-1)^2}$$

$$\left(= -2\, \underbrace{e^{\frac{1}{0^-}}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{0^2}}_{\to +\infty} \right) \text{ f.i.}$$

$$= \underbrace{\lim_{x\to 1^-} -2x}_{\to -2} \cdot \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^2} = (*)$$

Chiamo $z = \frac{1}{x^2-1}$ $\qquad \lim_{x\to 1^-} z = -\infty$

$$(*) = -2 \cdot \lim_{z\to -\infty} e^{z} \cdot z^2 =$$

$$= -2 \lim_{z\to -\infty} \frac{z^2}{e^{-z}} = -2 \cdot 0$$

se uso 2 volte De l'Hop

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} -2x\, \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{(x^2-1)^2} =$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} -2x \, \frac{e}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \left(-2 \, \frac{e^{\frac{1}{0^+}}}{0^2} = -2 \cdot \frac{+\infty}{0^2} \right)$$

$$= -2 \cdot (+\infty) \cdot (+\infty) = -\infty \Big)$$

$$= -\infty$$

$\Rightarrow$ $x = 1$ è punto cuspidale

<u>Esercizio</u> Studiare la discontinuità di

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} \log(1+x^2) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}} \log(1+x^2) = -1 \cdot \log 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} \log(1+x^2) = 1 \cdot \log 1 = 0$$

$\Longrightarrow$ $f(x)$ è continua in $x_0 = 0$

<u>Esercizio</u> Studiare Discontinuità di:

$$f(x) = \begin{cases} \text{arctg} \dfrac{|x|}{x^2-1} & \text{se } x \neq \pm 1 \\ 0 & \text{se } x = \pm 1 \end{cases}$$

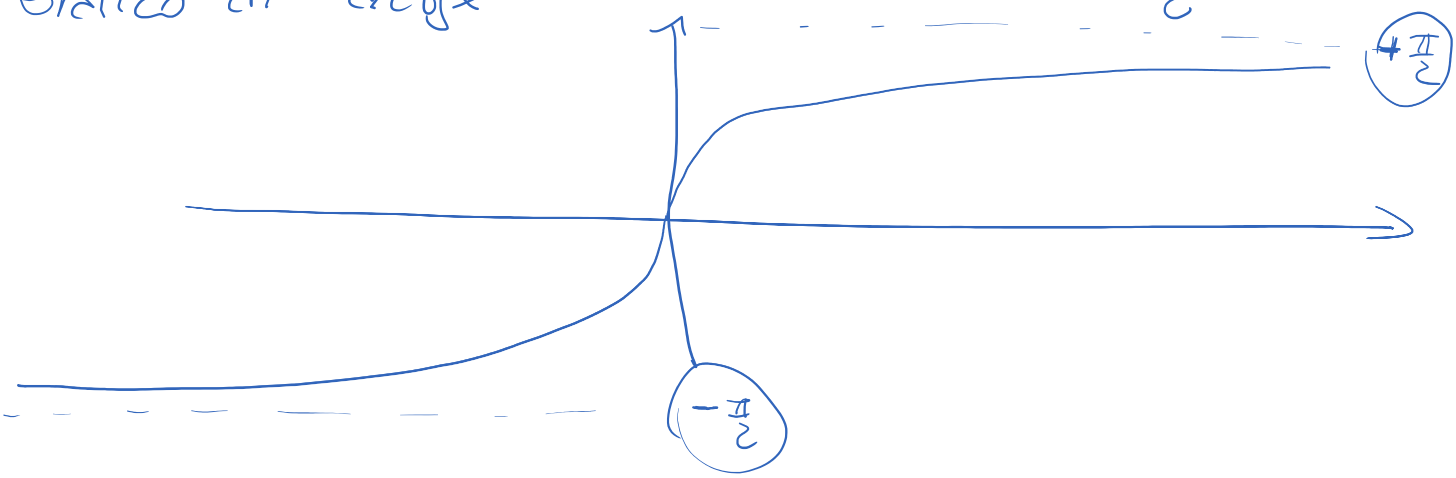
Nei punti $x = -1$ e $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \text{arctg}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) =$$

$$= \left(\text{arctg} \frac{1}{0^+}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Grafico di arctg$x$



$$\lim_{x \to 1^-} \text{arctg}\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \left(\text{arctg}\left(\frac{1}{0^-}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$\Longrightarrow$ $x = 1$ è discont. di 1^a specie

$$\lim_{x \to -1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{-x}{x^2-1}\right) = \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{0^-}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{-x}{x^2-1}\right) = \left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{0^+}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ $x=-1$ è discontinuità di 1ª specie

<u>Esercizio</u>

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{2^{-x+2}}_{\to +\infty} + \underbrace{\cos x}_{\text{non so comportamento}}$$

Si prova che $\nexists \lim_{x \to -\infty} \cos x$

mentre $\lim_{x \to -\infty} 2^{\overset{\to +\infty}{-x+2}} = +\infty$

Ma $2^{-x+2} + \cos x \geq 2^{-x+2} - 1$

essendo $\lim_{x \to -\infty} 2^{-x+2} - 1 = +\infty$

Dal teorema

confronto 2.

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} 2^{-x+2} + \cos x = +\infty$$

Esercizio

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x^2} = \left(\frac{0-0}{0^2} = \frac{0}{0} \text{ f.i.} \right)$$

De l'Hopital $= \lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}}{2x}$

$$= \left(\frac{1 - \frac{1}{1^2}}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} \text{ f.i.} \right)$$

De l'Hopital $= \lim_{x \to 0} \dfrac{\cancel{-}\left[\cancel{-} \dfrac{2\cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} \right]}{2} =$

$$= \frac{\dfrac{2\cos 0 \cdot (-\overset{\to 0}{\sin 0})}{\cos^4 1}}{2} = 0$$